UNIDAD DE APRENDIZAJE III

Que debo de saber antes de empezar el tema?

-Concepto de derivada.
-Reglas de derivación para funciones algebraicas.
    -Regla de la cadena.
    -Regla del producto.
    -Regla del cociente.

Propiedades de los logarítmos.

a) $log_a AB = log_a A + log_a B$
b) $log_a \frac{A}{B} = log_a A - log_a B$
c) $log_a\ A^n = n log_a A$
d) $log_a\ \sqrt[n]{A} = \frac{log_a\ A}{N}$

A Fórmulas para derivar funciones trascendentes.

- Trigonométricas directas.

Para poder derivar funciones trigonométricos se usan formulas directas donde debemos de considerar que ***u*** es el argumento de la función trigonométrica y ***u'*** es la derivada del argumento.

Formulario funciones trigonométricas directas.

Funcion Simple	**Derivada**
$y = sen(u)$	$y' = \cos(u)\,u'$
$y = \cos(u)$	$y' = -sen(u)u'$
$y = \tan(u)$	$y' = sec^2(u)u'$
$y = \cot(u)$	$y' = -csc^2(u)u'$
$y = \sec(u)$	$y' = \sec(u)\tan(u)\,u'$
$y = \csc(u)$	$y' = -\csc(u)\cot(u)\,u'$

Funcion Seno.

Ejemplos

1. $y = 4\ sen\ 2x$

Para este caso primeramente tenemos que identificar quien es el argumento, el cual será representado por la letra *u.*

$u = 2x$ por lo tanto cuando derivemos a u tendremos los siguiente u'=2 a partir de este momento solo basta acomodar dichos valores en la formula.

$$y' = 4(2\cos 2x)$$

El 4 se mantiene en su posición original, el primer 2 que se encuentra dentro del paréntesis es el valor de u' se recomienda ponerlo a un inicio ya que al final de la derivada se puede confundir con el argumento.

Quedando la derivada de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y' = 8\cos 2x}$$

2. $y=3sen^2\frac{x}{2}=3(sen\frac{x}{2})^2$

Al realizar este cambio en la función podemos ver que se le podrá dar solución mediante regla de la cadena.

$$y = u^n \quad y' = n(u)^{n-1}u'$$

Identificamos que u es todo los que esta dentro del paréntesis y n = 2 , no se debe olvidar que cuando se derive u habrá una nueva u que corresponde al argumento.

$$y' = 3(2)(sen\frac{x}{2})^{2-1}(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2})$$

Teniendo esto podemos realizar eliminación como se muestra acontinuación.

$$y' = 3(\cancel{2})(sen\frac{x}{2})^{2-1}(\frac{1}{\cancel{2}}\cos\frac{x}{2})$$

$$\boldsymbol{y' = 3sen\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}}$$

Considerar que 2-1= 1 por ello desaparece el exponente *en sen*$\frac{x}{2}$, en caso de ser un valor diferente de un 1 ese será el valor del exponente.

Funcion Coseno.

Ejemplos

1. y=cos(3x^2-x)

Para todas las funciones es exactamente los mismo, identificar el tipo de derivada a utilizar y aplicar formulas de forma directa.

$$u = 3x^2 - x$$

$$u' = 6x - 1$$

Despues de encontrar ambas insertamos directamente en la formula.

$$y' = -(6x-1)sen\,(3x^2-x)$$
$$\boldsymbol{y' = (-6x+1)sen\left(3x^2-x\right)}$$

2. $y = xcos3x$

Para este nuevo ejemplo vemos que a pesar de tener una función trigonométrica también es un producto, por lo tanto abordaremos la regla del producto que dice lo siguiente:

$$y = uv$$

$$y' = uv' + vu'$$

$$y = \underbrace{x}_{u}\underbrace{cos3x}_{v}$$

Ya que conocemos esto procedemos a encontrar la derivada de cada una, para después poder insertarlas en la formula.

$$u = x \qquad u' = 1$$
$$v = \cos 3x \qquad v' = -3sen3x$$
$$\boldsymbol{y' = x(-3sen3x) + cos3x(1)}$$
$$\boldsymbol{y' = -3xsen3x + cos3x}$$

Funcion Tangente.

Ejemplo

$y=\sqrt[3]{tan2x}$

Para este ejemplo de tangente lo primero que tenemos que hacer es quitar la raíz y expresarlo a forma de exponente.

$$y=\sqrt[3]{tan2x} = (tan\ 2x)^{\frac{1}{3}}$$

El tercio que se pone como exponente sale de la raíz.

De esta nueva forma podemos ver que la derivada debe de empezar por regla de la cadena.

$$y' = \frac{1}{3}(tan2x)^{\frac{1}{3}-1}\underbrace{(2sec^2 2x)}$$

Para lograr este resultado debemos de conocer cual es la derivada de *tanx* y considerar que u es el argumento por

$$y' = \frac{1}{3}(tan2x)^{-\frac{2}{3}}(2sec^2 2x)$$

$$y' = \frac{1}{3(tan2x)^{\frac{2}{3}}}(2sec^2 2x)$$

Recordemos que no pueden quedar exponentes negativos, por eso en este caso todo el conjunto baja al denominador.

$$\boldsymbol{y' = \frac{(2sec^2 2x)}{3\sqrt[3]{(tan2x)^2}}}$$

Para finalizar no dejaremos exponentes fraccionarios, estos se pasaran nuevamente a su forma de raíz.

Funcion Cotangente.

Ejemplo

$y = 2cot\frac{x}{3}$

Al igual que en los otros ejercicios primero determinaremos quien es u y u'.

$$u = \frac{x}{3} \qquad u' = \frac{1}{3}$$

Después de obtener lo anterior pocedemos a ubicar la formula directa que se encuentra en el formulario.

Por lo tanto tendremos lo siguiente:

Recordemos que este 2 ya estaba desde un principio y se podrá juntar con el valor de u'.

$$y' = 2\left(\frac{1}{3}\right)(-csc^2\frac{x}{3})$$

$$\boldsymbol{y' = -\frac{2}{3}\,csc^2\frac{x}{3}}$$

Funcion Cosecante.

Ejemplo

$y = a\csc 5x$

En este ejemplo que se presenta se deberá de realizar exactamente los mismos paso lo único es que debemos de tener en cuenta que podemos tener coeficientes como a , al analizar "a" debemos de tener mucho cuidado y comprobar que solo sea un numero , y no una función la cual se esta multiplicado con la función trigonométrica.

$$u = 5x \qquad u' = 5$$

$$y' = 5a[-\csc 5x\cot 5x]$$

$$\boldsymbol{y' = -5a\csc 5x\cot 5x}$$

Aqui se muestra como la letra a solo esta actuando como un coeficiente y no como una function a considerer por eso al multiplicarla con *ú=5* el resultado da solo 5a.

Funcion Secante.

Ejemplo

$y = 7\sec\frac{x}{3}$

$$u = \frac{x}{3} \qquad u' = \frac{1}{3}$$

$$y' = 7\left(\frac{1}{3}\right)\left(sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{7}{3}\,sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}}$$

Al trabajar con las funciones trigonométricas debemos recordar que no siempre se podrán resolver de forma directa aplicando las formulas, si no que debemos de analizar como se encuentra la función, ya que en ocasiones será necesario aplicar primero regla de la cadena, producto o cociente, en otros casos podríamos ver que el argumento de una función trigonométrica es otra función trigonométrica entonces u y u' serán dicha función.

Otro punto a considerar es que cuando se trabajan con funciones trigonométricas el argumento o angulo es intocable.

Ejercicios Derivar las siguientes funciones

a) $\sqrt{x}sen\sqrt{x}$
b) $y = tanxsenx$
c) $y = sen(cosx)$
d) $s(x) = tan^2xsec^3x$
e) $y = \frac{cotx}{x+2}$
f) $y = \sqrt{sen\ x}$
g) $y = \tan(1-x)^2$
h) $y = tan\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$
i) $y = sen(cscx)$
j) $y = \frac{tanx}{secx}$
k) $y = \frac{cosx}{x}$
l) $y = 5\sqrt{cos2x}$
m) $y = (sec5x + tanx)^3$
n) $y = 3senx - xcosx$
o) $f(x) = 2x\sqrt{senx}$

Trigonométricas inversas.

Para poder resolver derivadas de funciones trigonométricas inversas es indispensable conocer lo siguiente.

a) Conocer la función inversa a la con la cual se estará trabajando, esta puede ser *arc sen, arc cos, arc tan, arc cot, arc sec y arc csc.* Para cada uno de estas funciones existe una derivada directa.

Formulario

Funcion Simple	**Derivada**
$y = arc\ sen(u)$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\ \cos(u)$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\ \tan(u)$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = arc\ \cot(u)$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = arc\ \sec(u)$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = arc\ \csc(u)$	$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

b) Despues de conocer cual función es la que se deberá de trabajar debemos de identificar a u quien esta representada por el argumento.

$$y = arc\ sen(3x)$$
$$y = arc\cos(x)$$
$$y = arc\tan\left(\frac{x}{3}\right)$$
$$y = arc\cot(3x+2)$$
$$y = arc\sec\left(\frac{3x}{1-x}\right)$$
$$y = arc\csc(\sqrt{x})$$

Puede ser cualquier tipo argumento.

c) Despues como mera recomendación deberemos analizar la formula para la función trigonométrica especifica que se trabajará ya que esta formula nos dirá que otras variante de u necesitamos, podría ser u^2 o u', al conocerlas podremos desarrollarlas por aparte y al final solo colocarlas en la formula de la derivada.

Ejemplos

1. $y = arc\ sen\ 5x^2$

De inicio identificamos que la función a trabajar es arc sen por lo tanto la derivada de esta será:

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Despues identificamos la el valor de u , en este caso dicho valor es igual a $5x^2$.

Posteriormente vemos que en esta formula en especifico se requiere u^2 y u' asi que a partir del paso anterior procedemos a determinarlas.

$$u^2 = 25x^4 \qquad u' = 10x$$

Para finalizar agregamos los valores en la formula de la derivada obteniendo lo siguiente.

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\mathbf{10x}}{\sqrt{\mathbf{1-25x^4}}}$$

2. $y = arc\ cot\,\frac{x}{2}$

$$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$$
$$u = \frac{x}{2}$$
$$u^2 = \frac{x^2}{4} \qquad u' = \frac{1}{2}$$
$$y' = -\frac{u'}{1+u^2} = -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}$$

Asi como se muestra seria el resultado parcial de la derivada, ahora lo que falta es simplificarla.

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+x^2}{4}}$$

Al tenerla de esta forma aplicamos términos medio po término medio y extremo por extremo, teniendo como resultado lo siguiente:

$$y' = \frac{4}{2(4+x^2)} = \boldsymbol{\frac{4}{8+2x^2}}$$

3. $y = arc\,\sec(3x+2)$

Identificamos la formula dependiendo de la función trigonométrica inversa:

$$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Identificamos u, u^2 y u'.

$$u = 3x+2$$

$$u^2 = (3x+2)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2) + (2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$u' = 3$$

Ahora insertamos los valores en la formula de la derivada.

$$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{3}{3x+2\sqrt{9x^2+12x+4-1}}$$

Aplicando términos semejantes dentro de la raíz obtendremos el resultado final.

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{3x+2\sqrt{9x^2+12x+3}}}$$

4. $y = arc\,\csc(x^2-1)$

Identificamos la formula dependiendo de la función trigonométrica inversa:

$$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Identificamos u, u^2 y u'.

$$u = x^2-1$$

$$u^2 = (x^2-1)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(1) + (1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$u' = 2x$$

Ahora insertamos los valores en la formula de la derivada.

$$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} = -\frac{2x}{x^2-1\sqrt{x^4-2x^2+1-1}}$$

Ahora reducimos términos. $y' = \boldsymbol{-\frac{2x}{x^2-1\sqrt{x^4-2x^2}}}$

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios:

a) $y = arc\ sen\ x^2$
b) $y = arc \csc 2x$
c) $y = arc\ cot \frac{x}{a}$
d) $y = arc \cot \frac{3x}{1-x}$
e) $y = arc \sec \sqrt{x^2+3}$
f) $y = (arc\ sen\ 4x)^2$
g) $y = arc \tan ax^3$
h) $y = arc \sec \frac{2}{x}$
i) $y = arc \cos \sqrt{x}$

Logarítmicas.

Para poder derivar un logaritmo primeramente se debe de analizar si este se derivará de forma directa o tiene alguna propiedad como regla de la cadena , regla del producto o del cociente o función , en caso de que no tenga ninguna de las anteriores procedemos a aplicar de forma directa la siguiente formula.

Funcion Simple	Funcion Derivada
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$

Ejemplos

1. y=ln(ax+3)

Para este primer ejemplo vemos que es una derivada directa de la función logaritmo por lo tanto lo primero que deberemos hacer es determinar quien es u.

$$u = ax + 3$$

Despues de haber identificado u procedemos a encontrar u' como se muestra en la formula.

$$u' = a$$

Ahora podemos colocar a ambas en la formula de la derivada como se muestra a continuación.

$$y' = \frac{u'}{u} = \boldsymbol{\frac{a}{ax+3}}$$

2. y=ln (lnx)

Identificaremos a u para este caso debemos de darnos cuenta que es un logaritmo actua como argumento del primer logaritmo, por lo tanto:

$$u = \ln x$$

En este caso para poder derivar u tendremos que derivar el *ln x* y si condideramos que x esta actuando como una nueva u el resultado será el siguiente:

$$u' = \frac{1}{x}$$

Anexandolo en la formula original debemo de tener en cuanta poner el valor exactamente como halla resultado.

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{1}{x}}{ln\, x}$$

Ahora procedemos a simplificar el resultado.

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{x ln\, x}}$$

3. *y=ln (sen 3x)*

En este caso como podemos ver el valor de u es una función trigonométrica.

$$u = sen\, 3x$$

Sabiendo esto procedemos a derivar u.

$$u' = 3\, cos\, 3x$$

Obteniendo lo anterior acomodaremos los valores en la derivada de logaritmo.

$$y' = \frac{\mathbf{3\, cos\, 3x}}{\mathbf{sen\, 3x}}$$

Nota: Debemos considerar que aun que en el denominador y en el número existe un 3x no se pueden eliminar solo por ser parecidos, consideremos que los argumentos con intocables, una forma con la cual se podría simplificar seria considerando las identidades trigonométricas y que podría quedar de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y' = 3\, cot\, 3x}$$

4. $y = \sqrt{7 - x^2}$

$$u = \sqrt{7 - x^2}$$

$$u' = \frac{1}{2}(7 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$u' = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{7 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{7 - x^2}}$$

Sustituimos en la formula de la derivada.

$$y' = \frac{\frac{-x}{\sqrt{7 - x^2}}}{\sqrt{7 - x^2}}$$

A partir de este momento solo simplificaremos el resultado obtenido.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{7 - x^2}\sqrt{7 - x^2}}$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{-x}{7 - x^2}}$$

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios:

a) $y = \ln(x+2)$
b) $y = \ln cos\frac{x}{2}$
c) $y = \ln\tan x$
d) $y = \ln(x^5 + 3x^2 + 2)$
e) $y = \ln(x^3 + x)$
f) $y = 5\ln(3x+2)$
g) $y = x^3 lnx$: Regla del producto.
h) $y = \frac{\ln x}{x^2}$: Regla del cociente.
i) $y = ln\,^7x$: Regla de la cadena.
j) $y = \frac{1+x^3}{1-x^3}$: Usar propiedades de los logaritmos.
k) $y = ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$: Usar propiedades de los logaritmos.

Exponenciales.

Para poder derivar un exponente primeramente se debe de analizar si este se derivará de forma directa o tiene alguna propiedad como regla de la cadena , regla del producto o del cociente o función , en caso de que no tenga ninguna de las anteriores procedemos a aplicar de forma directa la siguiente formula.

Funcion Simple	Funcion Derivada
$y = e^u$	$y' = u'e^u$

Ejemplos

1. $y = e^x$

Determinamos el valor u. $u = x$

Despues de encontrar el valor de procedemos a derivar para encontrar u'.

$$u' = 1$$

Teniendo ambos valores encontramos el valor de la derivada a continuación:

$$y' = u'e^u = 1e^x$$
$$y' = \boldsymbol{e^x}$$

2. $y = e^{x^3}$

Para este caso el termino u seriá $u = x^3$, y al derivarlo obtendremos $u' = 3x^2$, lo que faltaría sería solo acomodar los términos en la formula de la derivada.

$$y' = \boldsymbol{3x^2e^{x^3}}$$

3. $y = e^{cos^2 3x}$

Primeramente identificamos el valor de u : $u = cos^2 3x$

Debemos de considerar que para derivar esta u tendremos que usar primeramente la regla de la cadena.

$$u' = 2(\cos 3x)(-3sen\ 3x) = -6\cos 3x\ sen 3x$$

Colocamos los valores de u y u' en la formula de la derivada.

$$y' = \mathbf{-6\cos 3x\ sen3x\ e^{cos^2 3x}}$$

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios:

a) $y = e^{-3x+4}$
b) $y = e^{\csc 3x}$
c) $y = e^{arc\ sen\ x^2}$
d) $y = e^{\sec 2x}$
e) $y = e^x(x^3 + 4)$: Regla de producto.
f) $y = x^5 e^{3x^2}$: Regla de producto.
g) $y = x^n e^{sen\ 2x}$: Regla del producto.
h) $y = \frac{e^x+3}{e^x+7}$: Regla del cociente.
i) $y = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^{3x}-e^{-3x}}$: Regla del cociente.
j) $y = (e^{2x} + 7x)^2$:Regla de la cadena